b) Etudions les variations de la fonction $h(x) = f(x) - x$ sur l'intervalle $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$. h est définie, continue, dérivable sur $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$.

$\forall x \in]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$, $h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{\sin x}{\cos x} - 1 = \operatorname{tg} x - 1$

x	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		$+$	‖
$h(x)$	$(\ln 2) - \frac{\pi}{3}$	↗	$+\infty$ ‖

h est définie, continue sur $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$

h est strictement croissante sur $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$

donc h est une bijection de $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$ sur $[\ \ln 2 - \frac{\pi}{3},\ +\infty\ [$

$0 \in [\ \ln 2 - \frac{\pi}{3},\ +\infty\ [$ donc 0 admet un seul antécédent α par h

d'où l'équation $f(x) = x$ admet dans $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$ une seule solution α.

c) On a : $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = h(U_n)$

or $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $h'(x) = \operatorname{tg} x - 1$

x	0		$\frac{\pi}{4}$
$h'(x)$		$-$	0
$h(x)$	0	↘	$\ln(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4}$

d'où $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $h(x) \leq 0$. Or $U_n \in [0, \frac{\pi}{4}]$ donc $h(U_n) \leq 0$

donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_{n+1} - U_n \leq 0$ et par conséquent $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite décroissante minorée par 0 donc (U_n) est convergente. Soit l sa limite.